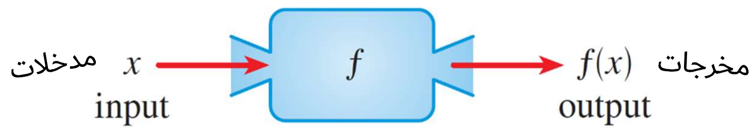
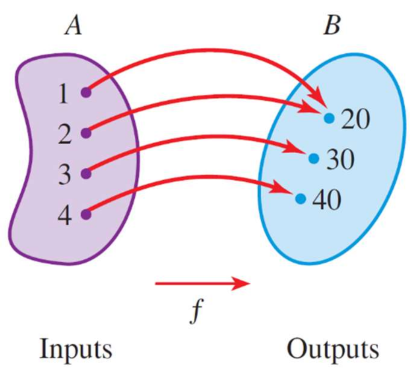
Section 2.1 – Functions

- A function الدالة f is a rule that assigns to each element “x” in a set A exactly one element “$f(x)$” in a set B

وصف علاقة بين عناصر مجموعة A (كل عنصر منها يسمى x)، و عناصر مجموعة B (كل عنصر يسمى $f(x)$)

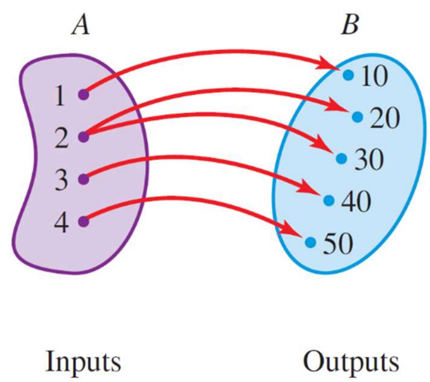


الدالة كأنها ماكينة: تدخل لها قيمة، تطلع منها قيمة أخرى.



(a) Function

دالة لأن كل عنصر في مجموعة المدخلات A يقابله قيمة واحدة فقط من المجموعة B.



(b) Not a function

ليست دالة لأن أحد عناصر المجموعة A يقابله قيمتين من المجموعة B.

لاحظ

مجموعة المُدخلات تسمى: input أو domain و معناها بالعربي : مجال الدالة

مجموعة المُخرجات تسمى: output أو range و معناها بالعربي : مدى الدالة

Example 1

A function f is defined by the formula

$$f(x) = x^2 + 4$$

(a) Evaluate $f(3)$, $f(-2)$, and $f(\sqrt{5})$

(b) Find the domain and range of f.

Solution

(a) $f(3) = 3^2 + 4$

$= 9 + 4 = 13$

$f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8$

$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4$

$= 5 + 4 = 9$

(b) D: $\mathbb{R}$ جميع الأعداد الحقيقية

إجابة أخرى $(-\infty, \infty)$

Range: $\because x^2 \geq 0$

$\therefore$ Range: $[4, \infty)$

Example 2

Let $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evaluate each function value.

(a) $f(-2)$ (b) $f(0)$ (c) $f(4)$ (d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

Solution

(a) $f(-2) = 3(-2)^2 + (-2) - 5$
$= 3.4 - 2 - 5 = 12 - 2 - 5 = 5$

(b) $f(0) = 3(0)^2 + 0 - 5 = -5$

(c) $f(4) = 3(4)^2 + 4 - 5$
$= 3 \cdot 16 + 4 - 5 = 48 + 4 - 5 = 47$

(d) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$

Example 3

Given that:

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ 39 + 15(x-2) & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

Find $C(0.2)$, $C(2)$, and $C(4)$

Solution

$C(0.2) = 39$

$C(2) = 39$

$C(4) = 39 + 15(4 - 2)$
$= 39 + 15 \cdot 2 = 69$

Example 4

Find the domain of each function:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ (b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ (c) $h(t) = \frac{t}{\sqrt{t+1}}$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

Solution

(a) $x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0 \qquad x = 1$

D: $\{x \mid x \neq 0 \text{ and } x \neq 1\}$

or in interval notation

D: $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$

(b) $9 - x^2 \geq 0$

$-x^2 \geq -9$

$x^2 \leq 9$

$-3 \leq x \leq 3$

D: $[-3, 3]$

(c) $t + 1 > 0$

$t > -1$

D: $(-1, \infty) = \{t \mid t > -1\}$

Problems

- Evaluate the function at the indicated values:

$f(x) = x^3 + 2x - 1;$

$f(-2),\quad f(a),\quad f(-a),\quad f\left(\frac{1}{2}\right),\quad \frac{f(a+h)-f(h)}{h}, h \neq 0$

$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2) - 1$

$= -8 - 4 - 1 = -13$

$f(a) = a^3 + 2a - 1$

$f(-a) = (-a)^3 + 2(-a) - 1 = -a^3 - 2a - 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1$

$= \frac{1}{8} + 1 - 1 = \frac{1}{8}$

$f(a+h) = (a+h)^3 + 2(a+h) - 1$

$= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 2a + 2h - 1$

$f(h) = h^3 + 2h - 1$

$\frac{f(a+h) - f(h)}{h} = \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + 2a}{h}$

- Evaluate the function at the indicated values:

$f(x) = \frac{1-2x}{3}$;

(a) $f(-2)$ (b) $f(a-1)$ (c) $f(a)$

(a) $f(-2) = \frac{1-2(-2)}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$

(b) $f(a-1) = \frac{1-2(a-1)}{3}$

$= \frac{1-2a+2}{3} = \frac{3-2a}{3}$

(c) $f(a) = \frac{1-2(a)}{3} = \frac{1-2a}{3}$

- Evaluate the piecewise defined function at the indicated values:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x < 0 \\ x+1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) $f(-2)$ (b) $f(-1)$ (c) $f(0)$ (d) $f(1)$ (e) $f(2)$

(a) $f(-2) = (-2)^2 = 4$

(b) $f(-1) = (-1)^2 = 1$

(c) $f(0) = 0+1 = 1$

(d) $f(1) = 1+1 = 2$

(e) $f(2) = 2+1 = 3$

$$f(x)=\begin{cases}3x & \text{if } x<0\\ x+1 & \text{if } 0\le x\le 2\\ x-1 & \text{if } x>2\end{cases}$$

(a) $f(-5)$ **(b)** $f(0)$ **(c)** $f(1)$ **(d)** $f(2)$ **(e)** $f(5)$

(a) $f(-5) = 3(-5) = -15$

(b) $f(0) = 0+1 = 1$

(c) $f(1) = 1+1 = 2$

(d) $f(2) = 2+1 = 3$

(e) $f(5) = 5-1 = 4$

- Use the function to evaluate the indicated expressions and simplify

$f(x) = 3x - 1;$

(a) $f(2x)$ **(b)** $2f(x)$ **(c)** $f(x+2)$ **(d)** $f(x^2)$

(a) $f(2x) = 3(2x) - 1 = 6x - 1$

(b) $2f(x) = 2[3x-1] = 6x - 2$

(c) $f(x+2) = 3(x+2) - 1$

$= 3x + 6 - 1 = 3x + 5$

(d) $f(x^2) = 3(x^2) - 1 = 3x^2 - 1$

- Find the domain of the function

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

interval notation

$D: \mathbb{R} / \{3\}$ أو $D: (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

صفر المقام

zero of the denominator

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

$x^2 - 4 \geq 0$

$x^2 \geq 4$

$x \geq 2$ or $x \leq -2$

$D: (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$$

$x^2 - 2x - 8 \geq 0$

$(x-4)(x+2) \geq 0$

	-3	-2	0	4	5
$x-4$	$-$		$-$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$D: (-\infty, -2] \cup [4, \infty)$

$$g(x) = \frac{3}{\sqrt{x-4}}$$

$x - 4 > 0$

$x > 4$

لاحظ بدون $(=)$
لأن الجذر في المقام

$D: (4, \infty)$