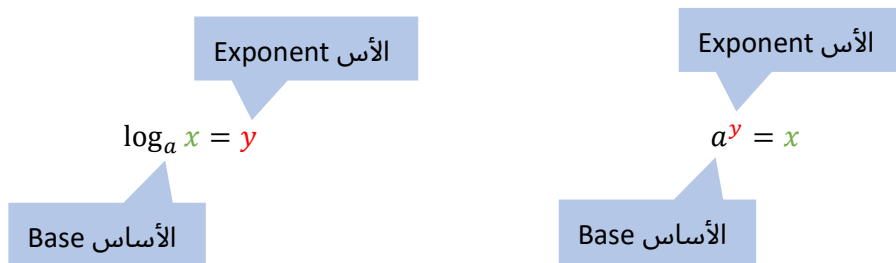


Section 4.3 – Logarithmic Functions

- الدالة اللوغاريتمية logarithmic function هي عكس inverse الدالة الأسية أو الدالة اللوغاريتمية ببساطة هي طريقة مختلفة لكتابة الدالة الأسية



Logarithmic function

نكتب الأساس و الناتج على اليسار، و الأس على اليمين

Exponential function

نكتب الأساس و الأس على اليسار، والناتج على اليمين

Example 1

Complete the following table by writing the missing form

Logarithmic form	Exponential form
$\log_2 8 = 3$	$10^5 = 100,000$
$\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$5^r = s$

Solution

Logarithmic form	Exponential form
$\log_{10} 100,000 = 5$	$10^5 = 100,000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

Example 2

Evaluate the following logarithms:

(a) $\log_{10} 1000$

(b) $\log_2 32$

(c) $\log_{10} 0.1$

(d) $\log_{16} 4$

Solution

(a) $10^3 = 1000 \Rightarrow \log_{10} 1000 = 3$

(b) $2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5$

(c) $10^{-1} = 0.1 \Rightarrow \log_{10} 0.1 = -1$

(d) $\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow \log_{16} 4 = \frac{1}{2}$

- إذا كان الأساس يساوي 10 يسمى لوغاريتم عادي **common logarithm**، ولا نكتب الأساس في هذه الحالة

$$\log x \xrightarrow{\text{هي نفسها}} \log_{10} x$$

- اللوغاريتم الطبيعي **natural logarithm** هو لوغاريتم أساسه يساوي العدد e ($e \cong 2.71828$)، و نستعمل

للتعبير عنه الرمز **ln**

$$\ln x \xrightarrow{\text{هي نفسها}} \log_e x$$

لاحظ

Properties of logarithms

1. $\log_a 1 = 0$

$\ln 1 = 0$

2. $\log_a a = 1$

$\ln e = 1$

3. $\log_a a^x = x$

$\ln e^x = x$

4. $a^{\log_a x} = x$

$e^{\ln x} = x$



$x > 0$

Example 3

Evaluate the following natural logarithms:

(a) $\ln e^8$

(b) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

Solution

$$(a) \ln e^8 = 8$$

$$(b) \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln e^{-2} = -2$$

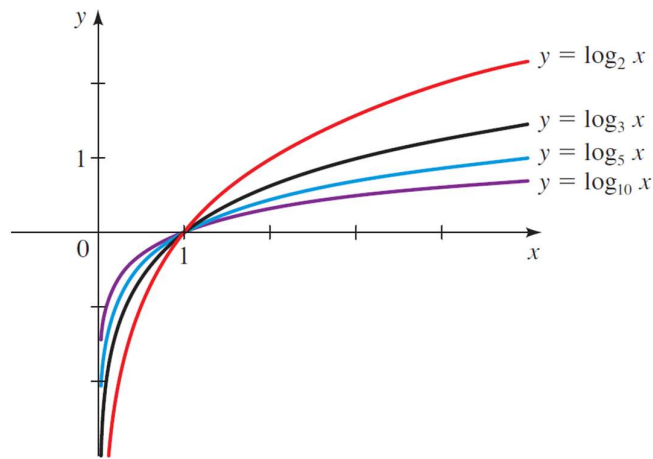
Example 4

Simplify $5^{\log_5 7} - \ln e$

Solution

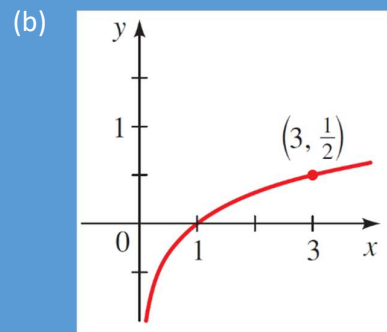
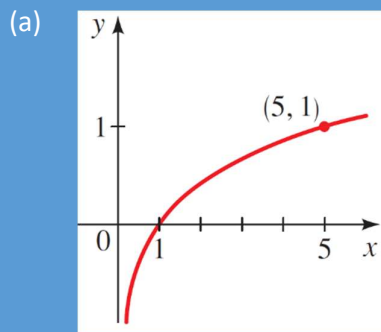
$$5^{\log_5 7} - \ln e = 7 - 1 = 6$$

- بعض رسومات الدوال اللوغاريتمية:



Example 5

Find the function of the form $y = \log_a x$ whose graph is given



Solution

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y &= \log_a x \\ 1 &= \log_a 5 \\ a &= 5 \\ y &= \log_5 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \frac{1}{2} &= \log_a 3 \\ a^{\frac{1}{2}} &= 3 \\ a &= 9 \\ y &= \log_9 x \end{aligned}$$

لاحظ

Domain مجال of $\log_a x$ is $(0, \infty)$

Range مدى of $\log_a x$ is $(-\infty, \infty)$

Example 6

Find the domain of each function.

(a) $f(x) = \log(x + 2)$

(b) $f(x) = \ln(4 - 3x)$

(c) $f(x) = \ln|x| + 1$

(d) $f(x) = \log x + \log(x - 1)$

(e) $f(x) = \ln(4 - x^2)$

Solution

(a) $x + 2 > 0$

$$x > -2 \Rightarrow D: (-2, \infty)$$

(b) $4 - 3x > 0$

$$-3x > -4$$

$$x < \frac{4}{3} \Rightarrow D: (-\infty, \frac{4}{3})$$

(c) $D: (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(d) $\log x \Rightarrow D: (0, \infty)$

$$\log(x-1) \Rightarrow D: (1, \infty)$$

$$\log x + \log(x-1) \Rightarrow D: (0, \infty) \cap (1, \infty) \\ = (1, \infty)$$

(e) $4 - x^2 > 0$

$$-x^2 > -4$$

$$x^2 < 4$$

$$-2 < x < 2$$

$$D: (-2, 2)$$

Problems

- Complete the table by finding the appropriate logarithmic or exponential form of the equation.

Logarithmic form	Exponential form
$\log_8 8 = 1$	$8^1 = 8$
$\log_8 64 = 2$	$8^2 = 64$
$\log_8 4 = \frac{2}{3}$	$8^{2/3} = 4$
$\log_8 512 = 3$	$8^3 = 512$
$\log_8 \left(\frac{1}{8}\right) = -1$	$8^{-1} = \frac{1}{8}$
$\log_8 \frac{1}{64} = -2$	$8^{-2} = \frac{1}{64}$
$\log_3 81 = 4$	$3^4 = 81$
$\log_8 2 = \frac{1}{3}$	$8^{1/3} = 2$

- Evaluate the expressions.

(a) $\log_2 2 = 1$

(b) $3^{\log_3 5} = 5$

(c) $\log_8 8^{17} = 17$

(d) $e^{\ln 10} = 10$

- Find the domain of the function.

(a) $\log(x + 3)$

$$x + 3 > 0$$

$$x > -3$$

$$D: (-3, \infty)$$

(b) $\log_3(x^2 - 1)$

$$x^2 - 1 > 0$$

$$x^2 > 1$$

$$x < -1$$

$$x > 1$$

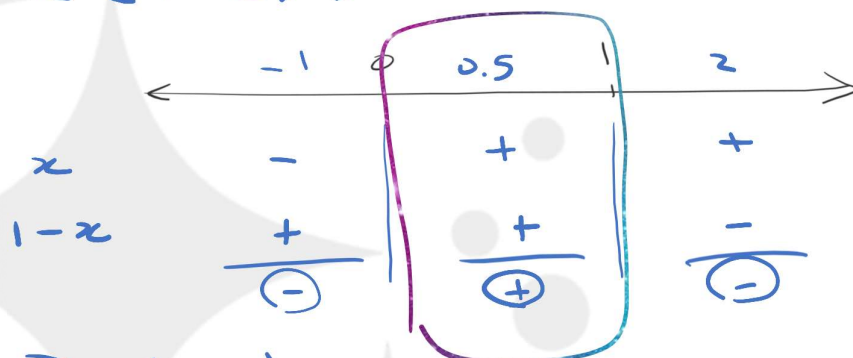
$$D: (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

(c) $\ln(x - x^2)$

$$x - x^2 > 0$$

$$x(1 - x) > 0$$

Zeros: 0, 1



$$D: (0, 1)$$